

Taitopuntari 1

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

- a) Muodostetaan ja sievennetään polynomien $2x^3 - 4x^2$ ja $6 - 2x^3$ summa.

$$\begin{aligned}(2x^3 - 4x^2) + (6 - 2x^3) & \quad 1\text{p} \\= 2x^3 - 4x^2 + 6 - 2x^3 & \quad 1\text{p} \\= -4x^2 + 6 & \quad 2\text{p}\end{aligned}$$

- b) Muodostetaan ja sievennetään polynomien $2x^3 - 4x^2$ ja $6 - 2x^3$.

$$\begin{aligned}(2x^3 - 4x^2) - (6 - 2x^3) & \quad 1\text{p} \\= 2x^3 - 4x^2 - 6 + 2x^3 & \quad 1\text{p} \\= 4x^3 - 4x^2 - 6 & \quad 2\text{p}\end{aligned}$$

- c) Muodostetaan ja sievennetään polynomien $2x^3 - 4x^2$ ja $6 - 2x^3$ tulo.

$$\begin{aligned}(2x^3 - 4x^2) \cdot (6 - 2x^3) & \quad 1\text{p} \\= 2x^3 \cdot 6 + 2x^3 \cdot (-2x^3) + (-4x^2) \cdot 6 + (-4x^2) \cdot (-2x^3) & \quad 1\text{p} \\= 12x^3 - 4x^6 - 24x^2 + 8x^5 \\= -4x^6 + 8x^5 + 12x^3 - 24x^2 & \quad 2\text{p}\end{aligned}$$

Vastaus

a) $(2x^3 - 4x^2) + (6 - 2x^3) = -4x^2 + 6$

b) $(2x^3 - 4x^2) - (6 - 2x^3) = 4x^3 - 4x^2 - 6$

c) $(2x^3 - 4x^2) \cdot (6 - 2x^3) = -4x^6 + 8x^5 + 12x^3 - 24x^2$

Taitopuntari 2

Vertaa omaa ratkaisiasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a)

$$x^2 - 10 = -3x \quad | +3 \qquad 1p$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \qquad 2p$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2} \qquad 1p$$

$$x = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad 2p$$

b)

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0 \qquad 2p$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 3 = 0 \quad | +3 \qquad 2p$$

$$2x = 3 \quad | :2$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad 2p$$

Vastaus

a) $x = -5$ tai $x = 2$

b) $x = 0$ tai $x = \frac{3}{2}$

Taitopuntari 3

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

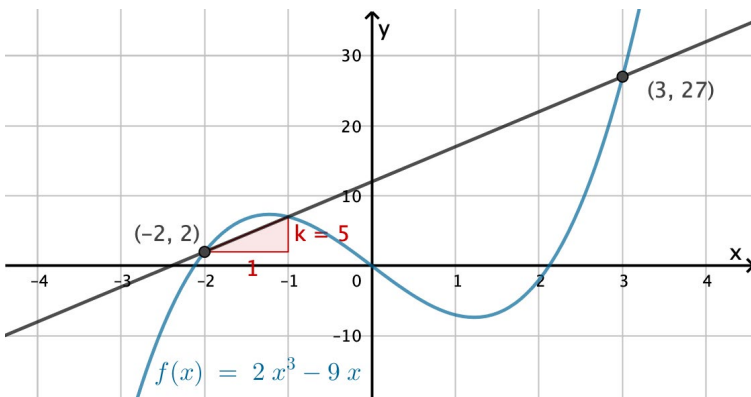
- a) Piirretään funktion $f(x) = 2x^3 - 9x$ kuvaaja geometriaohjelmalla.

1
p

Piirretään kuvaajalle pisteet kohtiin $x = -2$ ja $x = 3$.

Piirretään pisteiden kautta kulkeva sekantti ja määritetään sen kulmakerroin.

2
p



2
p

Sekantin kulmakerroin on $k = 5$, joten funktion f arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä $-2 \leq x \leq 3$ on 5.

1
p

- b) Piirretään funktion $f(x) = 2x^3 - 9x$ kuvaaja geometriaohjelmalla.

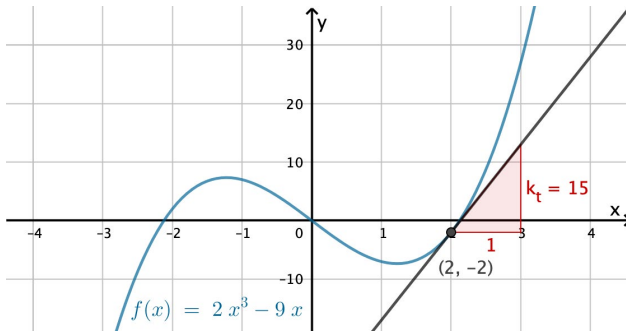
Piirretään kuvaajalle piste kohtaan $x = 2$.

Piirretään pisteeseen tangentti ja määritetään sen

2p

kulmakerroin.

2p



Tangentin kulmakerroin on $k = 15$, joten funktion f arvojen hetkellinen muutosnopeus kohdassa 2 on 15 .

2p

Vastaus

a) 5

b) 15

Taitopuntari 4

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Funktion derivaatta kohdassa a on funktion kuvaajalle kohtaan a piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion $f(x) = -2x^3 + 6x$ kuvaaja.

3p

Piirretään kuvaajalle pisteet kohtiin $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$.

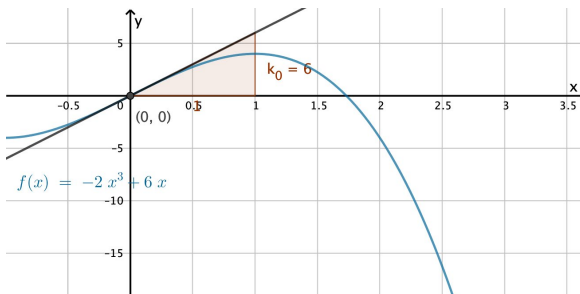
3p

Piirretään kuvaajalle tangentit edellä piirrettyihin kuvaajan pisteisiin.

3p

Määritetään tangenttien kulmakertoimet.

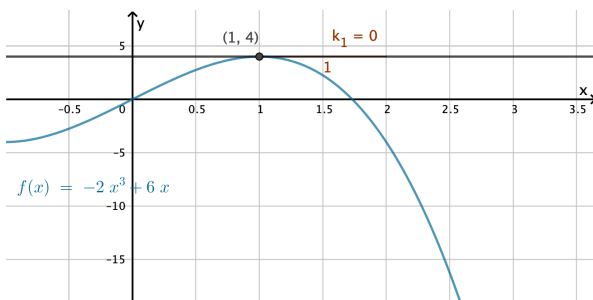
a)



Kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k_0 = 6$ joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 0$ on $f'(0) = 6$.

1p

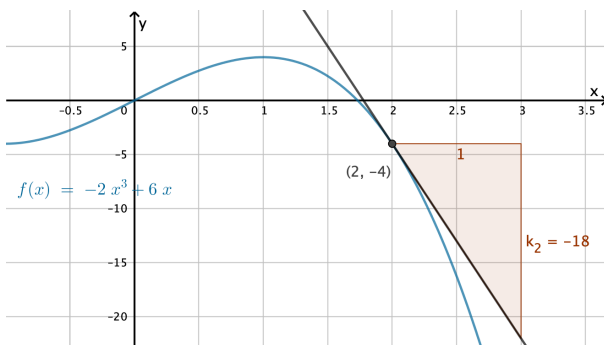
b)



Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k_1 = 0$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 1$ on $f'(1) = 0$.

1p

c)



Kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k_2 = -18$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 2$ on $f'(2) = -18$.

1p

Vastaus

a) $f'(0) = 6$

b) $f'(1) = 0$

c) $f'(2) = -18$

Taitopuntari 5

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f(x) = 4x^2 - 7x + 993$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 \\ &= 8x - 7 \end{aligned}$$

3p

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = -1$.

$$f'(-1) = 8 \cdot (-1) - 7 = -15$$

3p

b) Määritetään funktion g derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 3)(x + 3) \\ &= x^2 + 3x - 3x - 9 \\ &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

2p

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - 0 \\ &= 2x \end{aligned}$$

2p

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = -1$.

$$g'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

2p

Vastaus

a) $f'(x) = 8x - 7$, $f'(-1) = -15$

b) $g'(x) = 2x$, $g'(-1) = -2$

Taitopuntari 6

Vertaa omaa ratkaisiasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

- a) Funktion $f(x) = -0,5x^2 + 3x - 4$ kuvaaja on paraabeli. Koska kerroin $-0,5$ on negatiivinen luku, paraabeli aukeaa alaspäin. 2p

- b) Paraabelin huipun x -koordinaatti löydetään ratkaisemalla derivaattafunktion nollakohta.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0,5 \cdot 2x + 3 - 0 & 2p \\ &= -x + 3 & 1p \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$\begin{aligned} -x + 3 &= 0 & | -3 & 1p \\ -x &= -3 & | \cdot (-1) \\ x &= 3 & 1p \end{aligned}$$

Paraabelin huipun x -koordinaatti on $x = 3$.

Lasketaan huipun y -koordinaatti.

$$\begin{aligned} y &= f(3) = -0,5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 4 & 1p \\ &= 0,5 & 1p \end{aligned}$$

Paraabelin huippu on pisteessä $(3; 0,5)$. 1p

c) Funktion suurin arvo on 0,5.

1p

Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

1p

Vastaus

a) alaspäin

b) (3; 0,5)

c) suurin arvo 0,5; pienintä arvoa ei ole

Taitopuntari 7

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

- a) Sivujen pituuksien summa on 90,0 m.

$$2x + y = 90,0 \quad 1\text{p}$$

$$y = 90,0 - 2x \quad 1\text{p}$$

- b) Aitauksen pinta-alan ilmaisee funktio

$$\begin{aligned} A(x) &= xy \\ &= x(90,0 - 2x) \end{aligned} \quad 2\text{p}$$

$$= -2x^2 + 90,0x. \quad 1\text{p}$$

- c) Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion A määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad 1\text{p}$$

$$y \geq 0$$

$$90,0 - 2x \geq 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \leq 45,0 \quad 1\text{p}$$

$$\text{Määrittelyehto on } 0 \leq x \leq 45,0. \quad 1\text{p}$$

d) Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -2x^2 + 90,0x$. 1p

Määritetään laskimen Max-komennolla kohta, jossa funktion A arvo on suurin. 1p

Laskin antaa kohdaksi $x = 22,5$. 1p

Lasketaan sivun y pituus.

$$\begin{aligned} y &= 90,0 - 2x \\ &= 90,0 - 2 \cdot 22,5 \\ &= 45,0 \end{aligned} \quad 1p$$

Aitauksen pinta-ala on suurin, kun $x = 22,5$ m ja $y = 45,0$ m.

Vastaus

a) $y = 90,0 - 2x$

b) $A(x) = -2x^2 + 90,0x$

c) $0 \leq x \leq 45,0$

d) $x = 22,5$ m ja $y = 45,0$ m

Taitopuntari 8

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Munkkirinkilän hinta on $1,80 + 0,10x$ euroa. 1p

Viikkomyynnin määrä on $600 - 20x$ munkkirinkilää. 1p

b) Viikkomyynnin arvon ilmaisee funktio

$$f(x) = (1,80 + 0,10x)(600 - 20x) \quad 1p$$

$$= -2x^2 + 24x + 1080. \quad 1p$$

c) Hinnan ja viikkomyynnin on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion f määrittelyehto.

$$1,80 + 0,10x \geq 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \quad 1p$$

$$x \geq -18$$

$$600 - 20x \geq 0 \quad 1p$$

$$x \leq 30$$

$$\text{Määrittelyehto on } -18 \leq x \leq 30. \quad 1p$$

d) Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(x) = -2x^2 + 24x + 1080$. 1p

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $-18 \leq x \leq 30$ kohta, jossa funktion f arvo on suurin.

Funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 6$. 1p

Funktion f suurin arvo on $f(6) = 1152$. 1p

Lasketaan munkkirinkilän hinta.

$$1,80 + 0,10 \cdot x = 1,80 + 0,10 \cdot 6 = 2,40 \text{ (€)} \quad \text{1p}$$

Viikkomyynnin arvo on 1152 €. 1p

Vastaus

a) $1,80 + 0,10x$ euroa, $600 - 20x$ munkkirinkilää

b) $f(x) = -2x^2 + 24x + 1080$

c) $-18 \leq x \leq 30$

d) hinta 2,40 €, viikkomyynnin arvo 1152 €

Taitopuntari 9

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) $5x + 7 > 3x - 5 \quad | -3x$ 1p

$2x + 7 > -5 \quad | -7$ 1p

$2x > -12 \quad | :2$ 1p

$x > -6$ 1p

- b) Tulee selvittää, millä muuttujan x arvoilla funktion

$f(x) = x^2 - 3x - 10$ arvo on negatiivinen. Tutkitaan funktion f merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

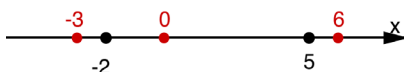
$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$
 2p

Tapa 1:

Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion f arvo.

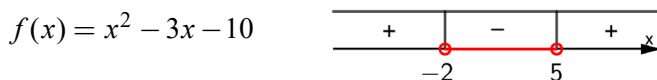


$$f(-3) = (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 10 = 8 > 0 \quad +$$

$$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 10 = -10 < 0 \quad -$$

$$f(6) = 6^2 - 3 \cdot 6 - 10 = 8 > 0 \quad + \quad 2p$$

Laaditaan funktion f merkkikaavio.

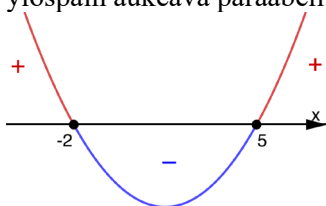


2p

Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 10$ arvo on negatiivinen, kun $-2 < x < 5$.
 . Epäyhtälö $x^2 - 3x - 10 < 0$ toteutuu, kun $-2 < x < 5$. 2p

Tapa 2:

Hahmotellaan funktion $f(x) = x^2 - 3x - 10$ kuvaaja. Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohtat ovat -2 ja 5 . 2p



2p

Funktion arvo on negatiivinen nollakohtien -2 ja 5 välissä eli kun $-2 < x < 5$. Epäyhtälö $x^2 - 3x - 10 < 0$ toteutuu, kun $-2 < x < 5$. 2p

Vastaus

a) $x > -6$

b) $-2 < x < 5$

Taitopuntari 10

Vertaa omaa ratkaisiasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) $f'(x) = 6 \cdot 5x^4 = \underbrace{30}_{3p} \underbrace{x^4}_{3p}$

b) Määritetään funktion $f(x) = 8x^3 - 15x^2$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 \cdot 3x^2 - 15 \cdot 2x \\ &= 24x^2 - 30x \end{aligned} \quad 3p$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 1.

$$\begin{aligned} f'(1) &= 24 \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 \\ &= -6 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 1p \\ 2p \end{array}$$

Vastaus

a) $f'(x) = 30x^4$

b) $f'(1) = -6$

Taitopuntari 11

Vertaa omaa ratkaisiasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Taitopuntari 12

Vertaa omaa ratkaisiasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

- a)** Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 5 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 \quad 2p$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 6x - 24 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \quad 1p$$

$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = 2 \quad 1p$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -4 ja 2 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$f'(-5) = 21 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -24 < 0 \quad -$$

$$f'(5) = 81 > 0 \quad + \quad 2p$$

		-4		2	
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	\nearrow		\searrow		\nearrow
		max		min	

Funktio f on kasvava välillä $x \leq -4$ ja välillä $x \geq 2$.

1p

Funktio f on vähenevä välillä $-4 \leq x \leq 2$.

1p

b) Funktion f maksimikohta on $x = -4$ ja minimikohta $x = 2$.

2p oikeat kohdat

2p oikeat ääriarvokohtien laadut

Vastaus

a) kasvava välillä $x \leq -4$ ja välillä $x \geq 2$,
vähenevä välillä $-4 \leq x \leq 2$

b) maksimikohta on $x = -4$, minimikohta $x = 2$

Taitopuntari 12

Vertaa omaa ratkaisusi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 17$ saa suljetulla välillä $[1, 4]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

1p

Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 17 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

2p

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

1p

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = 3$$

2p

Vain nollakohta $x = 3$ kuuluu välille $[1, 4]$.

1p

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 17 \quad \begin{array}{l} \text{Tallennetaan funktion lauseke} \\ \text{CAS-laskimeen.} \end{array}$$

$$f(1) = 16$$

suurin

$$f(4) = 13$$

3p

$$f(3) = 8$$

pienin

Funktion f suurin arvo välillä $[1, 4]$ on 16 ja pienin arvo 8.

2p

Vastaus

suurin arvo 16, pienin arvo 8

Taitopuntari 13

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.

Testistä voi saada enintään 12 pistettä.

Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.

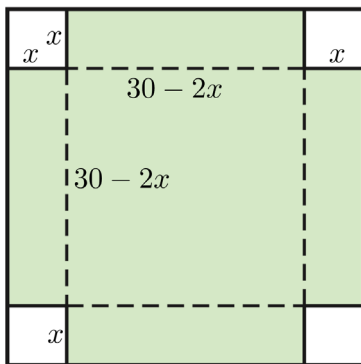
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella x .

1p

Laatikon pohja muodostuu keskelle jäävästä neliöstä, jonka sivun pituus on $30 - 2x$. Laatikon korkeus on x .

2p



Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laatikon tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot (30 - 2x) \cdot (30 - 2x)$$

Sievennetään

CAS-laskimella.

1p

$$= 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

1p

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion V määrittelyehto.

$$x \geq 0$$

$$30 - 2x \geq 0$$

$$x \leq 15$$

Ratkaistaan

CAS-laskimella.

1p

On löydettävä väliltä $0 \leq x \leq 15$ kohta, jossa funktion V arvo on suurin. 1p

Määritellään CAS-laskimeen funktio $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$. 1p

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 15$ kohta, jossa funktion V arvo on suurin. 1p

Laskin antaa kohdaksi $x = 5$. 1p

Funktio V saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 5$. Poisleikattavan neliön sivun pituuden tulee olla 5 cm. 2p

Vastaus

5 cm